7. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΑΝΩΔΟΜΗΣ

7.1 Μαθηματική Προσομοίωση της Ανωδομής

Τα μη κανονικά πολυώροφα κτίρια δηλ. αυτά που παρουσιάζουν εκκεντρότητα μεταξύ κέντρου μάζας και κέντρου ακαμψίας, εκδηλώνουν στρεπτικές κινήσεις στα διαφράγματα λόγω της μετακίνησης του εδάφους, ακόμα και όταν η μετακίνηση είναι ομοιόμορφη κάτω από τη βάση χωρίς στρεπτικές συνιστώσες. Η ανάλυση τέτοιων κτιρίων απαιτεί εκτός από μετακινησιακούς και στροφικούς βαθμούς ελευθερίας. Γι' αυτό το λόγο θεωρούμε μία τρισδιάστατη κατασκευή με τρεις βαθμούς ελευθερίας σε κάθε όροφο, (διάφραγμα), για την ικανοποιητική προσομοίωση της ελαστικής κατασκευής.

Στο πρόγραμμα 3D-BASIS παρέχονται δύο δυνατότητες προσομοίωσης της ανωδομής. Στην πρώτη επιλογή η ανωδομή θεωρείται ως ένα τρισδιάστατο διατμητικό κτίριο, όπου τα κατακόρυφα στοιχεία θεωρούνται αμφίπακτα ή με άλλα λόγια η δυσκαμψία των δοκών θεωρείται πολύ μεγάλη και στην δεύτερη ως ένα πραγματικά τρισδιάστατο φορέα με πλαισιακή λειτουργία των οριζοντίων και κατακορύφων στοιχείων στο χώρο. Στην περίπτωση των διατμητικών κτηρίων, λόγω της μεγάλης ακαμψίας των δοκών και των αμελητέων αξονικών παραμορφώσεων των υποστυλωμάτων, τα διαφράγματα μετακινούνται οριζόντια, οι δε στύλοι συμπεριφέρονται ως αμφίπακτοι με αποτέλεσμα την δυνατότητα ανάλυσης ξεχωριστά κάθε ορόφου. Στην συνέχεια περιγράφεται το μητρώο ακαμψίας της ανωδομής, για την πρώτη θεώρηση της ανωδομής ως διατμητικό κτίριο.

Θεωρούμε μια *N*-όροφη εξιδανικευμένη ανωδομή, η οποία αποτελείται από πλάκες άπειρης ατένειας στο επίπεδό τους στηριζόμενες σε αξονικά απαραμόρφωτα υποστυλώματα και τοιχώματα, η μάζα των οποίων θεωρείται συγκεντρωμένη στις στάθμες των ορόφων. Θεωρούμε ότι τα κέντρα μάζας όλων των ορόφων και της βάσης βρίσκονται επί του ίδιου κατακόρυφου άξονα, και ότι οι κύριοι άξονες αντίστασης (ακαμψίας) όλων των ορόφων έχουν τον ίδιο προσανατολισμό, ενώ δεν βρίσκονται κατ' ανάγκη επί του ίδιου κατακόρυφου άξονα.

Οι εκκεντρότητες, e_{xl} και e_{yl} , μεταξύ κέντρων μάζας και κέντρων αντίστασης ορίζονται ως εξής:

$$e_{xl} = \frac{1}{K_{yl}} \sum_i X_{il} k_{iy} \quad \text{και} \quad e_{yl} = \frac{1}{K_{xl}} \sum_i Y_{il} k_{ix}$$

όπου, $K_{xl} = \sum_i k_{ix}$ και $K_{yl} = \sum_i k_{iy}$,

τα k_{ix} και k_{iy} αντιπροσωπεύουν τις μετακινησιακές ακαμψίες των στοιχείων (υποστυλωμάτων ή τοιχωμάτων) κάθε ορόφου l , ως προς τους κύριους άξονες αντίστασης X και Y αντιστοίχως. Τα X_{il} και Y_{il} προσδιορίζουν την θέση κάθε στοιχείου i με σημείο αναφοράς το κέντρο μάζας κάθε ορόφου. Η στρεπτική ακαμψία κάθε ορόφου l , ως προς το κέντρο μάζας του, δίνεται από την σχέση:

$$K_{tl} = \sum_i k_{ix} Y_{il}^2 + \sum_i k_{iy} X_{il}^2$$

όπου τα X_{il} και Y_{il} προσδιορίζουν την θέση κάθε στοιχείου i με σημείο αναφοράς το κέντρο μάζας κάθε ορόφου.

Οπότε το μητρώο ακαμψίας της κατασκευής παίρνει την εξής τρισδιαγώνια μορφή:

$$\left[\begin{array}{cccccc}
k_{xn} & 0 & -k_{xn}e_{yn} & -k_{xn} & 0 & k_{xn}e_{yn} \\
0 & k_{yn} & k_{yn}e_{xn} & 0 & -k_{yn} & -k_{yn}e_{xn} \\
-k_{xn}e_{yn} & k_{yn}e_{xn} & k_{tn} & k_{xn}e_{yn} & -k_{yn}e_{xn} & -k_{tn} \\
 & & & k_{xn}+k_{xn-1} & 0 & -k_{xn}e_{yn}-k_{xn-1}e_{yn-1} \\
 & SYM & & 0 & k_{yn}+k_{yn-1} & k_{yn}e_{xn}+k_{yn-1}e_{xn-1} \\
 & & & -k_{xn}e_{yn}-k_{xn-1}e_{yn-1} & k_{yn}e_{xn}+k_{yn-1}e_{xn-1} & k_{tn}+k_{tn-1} \\
 & & & & & \\
 & 0 & & & SYM & \\
 & & & & & \\
 & 0 & & & 0 &
\end{array} \right.$$

(συνεχίζεται)

$$
\left.
\begin{array}{cccccc}
 & 0 & & & 0 & \\
 & & & & & \\
 & SYM & & & 0 & \\
 & & & & & \\
k_{x3}+k_{x2} & 0 & -k_{x3}e_{y3}-k_{x2}e_{y2} & & & \\
0 & k_{y3}+k_{y2} & k_{y3}e_{x3}+k_{y2}e_{x2} & & SYM & \\
-k_{x3}e_{y3}-k_{x2}e_{y2} & k_{y3}e_{x3}+k_{y2}e_{x2} & k_{t3}+k_{t2} & & & \\
 & & & k_{x2}+k_{x1} & 0 & -k_{x2}e_{y2}-k_{x1}e_{y1} \\
 & 0 & & 0 & k_{y2}+k_{y1} & k_{y2}e_{x2}+k_{y1}e_{x1} \\
 & & & -k_{x2}e_{y2}-k_{x1}e_{y1} & k_{y2}e_{x2}+k_{y1}e_{x1} & k_{t2}+k_{t1}
\end{array}
\right]
$$

7.2 Δυναμική Ανάλυση της Κατασκευής

Για την διατύπωση των εξισώσεων κίνησης των πολυωρόφων κτιρίων, υπό την δράση δυναμικών φορτίων, γίνεται χρήση της αρχής D' Alembert, σύμφωνα με την οποία ένα σύστημα βρίσκεται σε δυναμική ισορροπία υπό την επενέργεια των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν σε αυτό και των αδρανειακών δυνάμεων του σε κάθε χρονική στιγμή. Οι αδρανειακές δυνάμεις δρουν αντίθετα από την επιτάχυνση και είναι ανάλογες της μάζας και της επιτάχυνσης ενώ εφαρμόζονται στο κέντρο βάρους της μάζας που αναφέρονται. Δηλαδή:

$$\vec{f}_I = -m\,\vec{\alpha}$$

Για την ανάλυση των πολυωρόφων κτιρίων γίνεται η παραδοχή της συγκέντρωσης της μάζας της κατασκευής στις στάθμες των ορόφων. Με βάση την παραδοχή συγκεντρωμένων μαζών, οι αδρανειακές δυνάμεις, στις στάθμες των ορόφων, ανάγονται στο κέντρο βάρους κάθε ορόφου ως δυνάμεις αδράνειας κατά την διεύθυνση των μεταφορικών β.ε. στο κέντρο βάρους κάθε ορόφου και της αδρανειακής ροπής κατά την κατακόρυφη στροφική επιτάχυνση κάθε διαφράγματος. Η αδρανειακή ροπή είναι ανάλογη της στροφικής αδράνειας του διαφράγματος και εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους του. Εκτός των αδρανειακών δυνάμεων στην πολυώροφη κατασκευή θεωρούνται ότι δρουν και δυνάμεις απόσβεσης της κίνησης ανάλογες της ταχύτητας.

Με βάση τα παραπάνω η διανυσματική εξίσωση δυναμικής ισορροπίας των γενικευμένων δυνάμεων (δυνάμεων και ροπών) είναι:

$$\{f_I\} + \{f_D\} + \{f_S\} + \{f(t)\} = 0$$

όπου $\{f_I\}$ είναι οι αδρανειακές δυνάμεις, $\{f_D\}$ είναι οι δυνάμεις απόσβεσης, $\{f_S\}$ είναι οι ελαστικές δυνάμεις, και $\{f(t)\}$ είναι οι εξωτερικές δυναμικές δράσεις.

Η παραπάνω εξίσωση εκφράζεται συναρτήσει των μετακινήσεων των διαφραγμάτων μέσο των σχέσεων:

$$\{f_I\} = -[M]\{\ddot{U}\}$$

$$\{f_D\} = -[C]\{\dot{U}\}$$

$$\{f_S\} = -[K]\{U\}$$

όπου $[M]$, $[C]$ και $[K]$ είναι τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και ακαμψίας ως προς τους β.ε. των διαφραγμάτων.

Για να πραγματοποιηθεί η άθροιση των διανυσμάτων των παραπάνω δυνάμεων, αυτές πρέπει να εφαρμόζονται στα ίδια σημεία. Οι αδρανειακές δυνάμεις και οι δυνάμεις απόσβεσης ορίστηκαν στο κέντρο βάρους κάθε ορόφου, ενώ οι ελαστικές δυνάμεις ανάγονται στα σημεία O_i όπου τα διαφράγματα τέμνουν τον άξονα z του καθολικού συστήματος. Λόγω όμως της παραδοχής των συγκεντρωμένων μαζών, το μητρώο μάζας στα κέντρα βάρους των διαφραγμάτων είναι διαγώνιο μητρώο, ιδιότητα η οποία δεν διατηρείται αν αναχθεί στα σημεία O_i . Για την απλούστευση λοιπόν της επίλυσης του προβλήματος των ιδιοτιμών επιλέγεται η αναγωγή των ελαστικών δυνάμεων στα κέντρα βάρους των ορόφων. Έχοντας εκφράσει όλες τις δυνάμεις στα ίδια σημεία, η άθροισή τους παρέχει την μητρωική εξίσωση της δυναμικής ισορροπίας της ανωδομής:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{f(t)\} \tag{7.1}$$

όπου $[K]$ το μητρώο ακαμψίας, όπως αυτό διατυπώθηκε προηγουμένως, όπου $[M]$ είναι:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{xn} & & & & & & & \\ & m_{yn} & & & & & & \\ & & I_n & & & & & \\ & & & . & & & & \\ & & & & . & & & \\ & & & & & m_{x1} & & \\ & & & & & & m_{y1} & \\ & & & & & & & I_1 \end{bmatrix}$$

Το διαγώνιο μητρώο μάζας της ανωδομής, που περιλαμβάνει αδρανειακούς όρους κατά τη διεύθυνση των μεταφορικών β.ε. καθώς και την κατακόρυφη περιστροφή των διαφραγμάτων.

Και όπου $[C]$ είναι το μητρώο απόσβεσης, το οποίο θεωρείται ότι διαγωνοποιείται από το μητρώο των ιδιομορφών $[\Phi]$ έτσι ώστε:

$$[\Phi]^{\mathrm{T}}[C][\Phi] = \begin{bmatrix} 2\omega_n\zeta_n & & & & & \\ & 2\omega_{n-1}\zeta_{n-1} & & & & \\ & & . & & & \\ & & & . & & \\ & & & & 2\omega_2\zeta_2 & \\ & & & & & 2\omega_1\zeta_1 \end{bmatrix}$$

όπου ζ_i ο συντελεστής απόσβεσης της ιδιομορφής i.

Όταν η πολυώροφη κατασκευή υπόκειται σε σεισμική διέγερση στη βάση της, τότε το καθολικό σύστημα αναφοράς της κατασκευής και κατά συνέπεια και το κεντροβαρικό σύστημα αποτελούν κινούμενα συστήματα. Για την αναγωγή της κίνησης σε σταθερό σύστημα αναφοράς, με την προϋπόθεση ότι η εδαφική κίνηση είναι μεταφορική κατά σταθερή διεύθυνση, θεωρούμε την σχετική κίνηση της ανωδομής ως προς την βάση και επιβάλλουμε τις δυνάμεις αδράνειας του μεταφορικά κινούμενου συστήματος στα κέντρα βάρους των μαζών των ορόφων. Οπότε στην εξίσωση (7.1), έχουμε για το $\{f(t)\}$:

$$\{f(t)\} = -[M][R]\{\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}_b(t)\}$$

όπου $R = \begin{pmatrix} R_n^* \\ . \\ . \\ R_i^* \\ . \\ R_1^* \end{pmatrix}$ με $R_i^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -Y_i \\ 0 & 1 & X_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,όπου X_i είναι η απόσταση του κέντρου μάζας του i ορόφου από το κέντρο μάζας της βάσης κατά την X διεύθυνση, και Y_i η απόσταση του κέντρου μάζας του i ορόφου από το κέντρο μάζας της βάσης κατά την Y διεύθυνση.

Έτσι η εξίσωση (7.1), για μια N-οροφη κατασκευή, που υπόκειται σε σεισμική διέγερση στη βάση της, γίνεται:

$$[M]_{nxn}\{\ddot{U}\}_{nx1} + [C]_{nxn}\{\dot{U}\}_{nx1} + [K]_{nxn}\{U\}_{nx1} = -[M]_{nxn}[R]_{nx3}\ \{\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}_b(t)\}_{3x1} \qquad (7.2)$$

όπου $\ddot{U}$ είναι η σχετική επιτάχυνση κάθε ορόφου ως προς την βάση, $\dot{U}$ είναι η σχετική ταχύτητα ως προς την βάση, U είναι η σχετική μετακίνηση ως προς την βάση, $\ddot{u}_b$ η σχετική ως προς το έδαφος επιτάχυνση της βάσης, και $\ddot{u}_g$ η επιτάχυνση του εδάφους.

Οι ιδιοσυχνότητες και οι αντίστοιχες ιδιομορφές της ανωδομής, προκύπτουν από την επίλυση των ελεύθερων ταλαντώσεων του συστήματος χωρίς απόσβεση. Σύμφωνα με τη μέθοδο των ιδιομορφών, είναι δυνατόν να υπολογιστούν μόνο οι k πρώτες ιδιοσυχνότητες και οι αντίστοιχες ιδιομορφές. Η δυναμική ανάλυση, με βάση την παραδοχή συγκεντρωμένων μαζών και τη μέθοδο των ιδιομορφών, χρησιμοποιώντας λίγες πρώτες ιδιομορφές δίνει συγκλίνοντα αποτελέσματα για τις μετακινήσεις των διαφραγμάτων και τα εντατικά μεγέθη των επιμέρους στοιχείων. Ακολουθώντας λοιπόν τη μέθοδο των ιδιομορφών έχουμε τα εξής:

Θέτοντας στην εξίσωση (7.2), όπου $\{U\} = [\Phi]\{u^*\}$ και πολλαπλασιάζοντας την με Φ^T έχουμε:

$$\left[\Phi^T M \Phi\right]_{nxn} \ddot{u}^*_{nx1} + \left[\Phi^T C \Phi\right]_{nxn} \dot{u}^*_{nx1} + \left[\Phi^T K \Phi\right]_{nxn} u^*_{nx1} = -\left[\Phi^T M R\right]_{nx3} \{\ddot{u}_g + \ddot{u}_b\}_{3x1} \qquad (7.3)$$

τα μητρώα [*C*] και [*K*] διαγωνοποιούνται από το μητρώο των ιδιομορφών και έτσι καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\left[I\right]_{nxn}\ddot{u}^{*}_{nx1}+\left[2\zeta_i\omega_i\right]_{nxn}\dot{u}^{*}_{nx1}+\left[\omega_i^{2}\right]_{nxn}u^{*}_{nx1}=-\left[\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{M}R\right]_{nx3}\left\{\ddot{u}_g+\ddot{u}_b\right\}_{3x1} \quad (7.4)$$

όπου ζ_i ο συντελεστής απόσβεσης της *i* ιδιομορφής, και ω_i η ιδιοσυχνότητα της *i* ιδιομορφής.

Για την βάση, η εξίσωση της κίνησης της ως προς τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της βάσης, έχει ως εξής:

$$\left[\mathrm{M}_s\right]_{3xn}\left\{\{\ddot{u}\}+[R]\{\ddot{u}_b+\ddot{u}_g\}\right\}_{nx1}+\left[\mathrm{M}_b\right]_{3x3}\{\ddot{u}_b+\ddot{u}_g\}_{3x1}+\left[C_b\right]_{3x3}\{\dot{u}_b\}_{3x1}+\left[\mathrm{K}_b\right]_{3x3}\{u_b\}_{3x1}+\{f_{\mathrm{N}}\}_{3x1}=0 \quad (7.5)$$

όπου $\mathrm{M}_s=\begin{pmatrix} m_{xn} & 0 & 0 & . & . & . & m_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{yn} & 0 & . & . & . & 0 & m_{y1} & 0\,. \\ 0 & 0 & I_n & . & . & . & 0 & 0 & I_1 \end{pmatrix}=R^{\mathrm{T}}\mathrm{M}$

όπου $\mathrm{M}_b=\begin{pmatrix} m_{bx} & 0 & 0 \\ 0 & m_{by} & 0 \\ 0 & 0 & I_b \end{pmatrix}$ και όπου C_b και K_b , είναι το μητρώο απόσβεσης της βάσης και το μητρώο ακαμψίας των ελαστικών στοιχείων της βάσης αντιστοίχως.

Για το διάνυσμα $\{f_N\}_{3x1}$ έχουμε:

$$f_N=\left\{f_{Hyst}+f_{Fr}\right\}$$

όπου, f_{Hyst} είναι η δύναμη επαναφοράς των υστερητικών στοιχείων, και f_{Fr} είναι η δύναμη επαναφοράς των στοιχείων με συμπεριφορά τριβής.

Γράφοντας την εξίσωση (7.5) με την εξής μορφή:

$$\left[R^{\mathrm{T}}\mathrm{M}_s\right]\{\ddot{u}\}+\left[R^{\mathrm{T}}\mathrm{M}_s\right][R]\{\ddot{u}_b+\ddot{u}_g\}+\left[\mathrm{M}_b\right]\{\ddot{u}_b+\ddot{u}_g\}+\left[C_b\right]\{\dot{u}_b\}+\left[\mathrm{K}_b\right]\{u_b\}+\{f_N\}=0 \quad (7.6)$$

και θέτοντας όπου $\{u\}=[\Phi]\{u^{*}\}$ παίρνουμε τελικά την εξίσωση:

$$[R]^{\mathrm{T}}[\mathrm{M}]_{nxn}[\Phi]\{\ddot{u}^{*}\}+\left[R^{\mathrm{T}}\mathrm{M}R+\mathrm{M}_b\right]\{\ddot{u}_b+\ddot{u}_g\}+\left[C_b\right]\{\dot{u}_b\}+\left[\mathrm{K}_b\right]\{u_b\}+\{f_{\mathrm{N}}\}=0 \quad (7.7)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (7.4) και (7.7), παίρνουμε την εξίσωση της κίνησης για την ανωδομή και την βάση μαζί, ως εξής:

$$\begin{pmatrix} [I] & [\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{M}R] \\ [R^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\Phi] & [R^{\mathrm{T}}\mathrm{M}R+\mathrm{M}_b] \end{pmatrix}_{(n+3)x(n+3)} \begin{Bmatrix} \ddot{u}^* \\ \ddot{u}_b \end{Bmatrix}_{(n+3)x1} + \begin{pmatrix} [2\zeta_i\omega_i] & 0 \\ 0 & [C_b] \end{pmatrix}_{(n+3)x(n+3)} \begin{Bmatrix} \dot{u}^* \\ \dot{u}_b \end{Bmatrix}_{(n+3)x1} +$$

$$+\begin{pmatrix} [\omega_i^2] & 0 \\ 0 & [\mathrm{K}_b] \end{pmatrix}_{(n+3)x(n+3)} \begin{Bmatrix} u^* \\ u_b \end{Bmatrix}_{(n+3)x1} + \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{\mathrm{N}} \end{Bmatrix}_{(n+3)x1} = -\begin{bmatrix} \Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{M}R \\ R^{\mathrm{T}}\mathrm{M}R+\mathrm{M}_b \end{bmatrix}_{(n+3)x3} \tag{7.8}$$

Δηλαδή είναι:

$$\mathrm{M}^*\ddot{u}_t^c + C^*\dot{u}_t^c + \mathrm{K}^*u_t^c + f_t = p_t$$

όπου $u_t^c = \begin{Bmatrix} u^* \\ u_b \end{Bmatrix}_t$.